



FAN, TA'LIM VA AMALIYOT INTEGRATSIYASI

ISSN: 2181-1776

Q. K. Janiqulov

SamVMI akademik litsey matematika fani o'qituvchisi

PARAMETRGA BOG'LIQ DARAJALI FUNKSIYANING ASOSIY XOSSALARI VA QO'LLANILISHI

Annotatsiya

Darajali funktsiyaning eng sodda ko'rinishi va uning asosiy xossalari hamda grafigi elementar matematika kurslarida atroflicha o'rganilgan. Maqolada darajali funktsiyaning parametrlashtirilgan eng umumiy ko'rinishi o'rganilgan, jumladan kasr-chiziqli funktsiyalar ham parametrlarning tanlangan xususiy qiymatlarida hosil bo'ladi. Bundan tashqari umumiy ko'rinishdagi darajali funktsiya unda qatnashgan parametrlarning qanday qiymatlarida nollarga ega, qachon asimptotalarga ega, grafiklari qaysi choraklarda joylashishi haqidagi savollarga to'liq javob berilib, oddiy giperboladan boshlab umumiy ko'rinishdagi giperbolagacha yasash ketma-ketligi sxemasi misollarda ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: Darajali so'zlar, funktsiya, parameter, kanonik shakli, ko'rsatkich, kasr-chiziqli, kvadrat funktsiya, butun son, ratsional son, simmetrik sindirish, qisish, darajali giperbola, darajali parabola, yordamchi koordinata o'qlari.

Darajali funktsiya umumiy o'rta va o'rta maxsus ta'lim matematikasida asosan

$$y = ax^{\alpha} \quad (1)$$

kanonik shaklda o'rganiladi, bu yerda a haqiqiy son α esa ratsional son.

Biz darajali funktsiyaning quyidagi parametrlar orqali berilgan umumiy ko'rinishini o'rganamiz.

Ta'rif: Quyidagi $y = a(bx + c)^\alpha + d, a \cdot b \neq 0$ (2)

formula bilan berilgan funksiyaga **darajali funksiya** deyiladi. Bunda a, b, c va d lar oldindan beriladigan o'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lib, ular **ko'effitsiyentlar** yoki **parametrlar** deb ataladi. α esa haqiqiy son bo'lib, unga (2) ning **ko'rsatkichi** deyiladi.

[1], [5] – ishlarda kanonik ko'rinishdagi darajali funksiyaning ko'rsatkichiga bog'liq holda asosiy xossalari: juft-toqlik, monotonlik, ishoralari va ekstremumlari jadval shaklda keltirilgan. [2], [3], [4], [7], [8] – darajali funksiyaning kanonik shakli ko'rsatkich juft va toq sonlar hamda ratsional son bo'lganda o'rganilgan. [6] da kasr – chiziqli ifodaga bog'liq murakkab funksiya o'rganilgan. [9] da parametrlarga bogliq kasr-chiziqli funksiya va umumiy parametrli ko'rinishdagi 3-darajali ko'phad orqali berilgan funksiyalarning xossalari va grafiklari va grafiklari o'rganilgan. [5], [10] ishlarida kasr-chiziqli funksiya parametrlar orqali berilgan holda qisman o'rganilgan

Masalan, $y = 2(3x - 6)^3, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = -x^2, y = 3\sqrt{2x - 3} + 5, y = \sqrt[3]{x}, y = 2 + \frac{3}{x}$ funksiyalar darajali funksiyaga misol bo'ladi. Demak, biz biladigan chiziqli, kasr-chiziqli va kvadrat funksiyalar ham darajali funksiya bo'lar ekan. Chunki, istalgan $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiyani $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyani esa $y = \frac{bc-ad}{c} \cdot (cx + d)^{-1} + \frac{a}{c}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Darajali funksiya α ning berilishiga qarab ikki turga bo'linadi:

1. Ko'rsatkichi butun son bo'lgan darajali funksiya
2. Ko'rsatkichi kasr son bo'lgan darajali funksiya

Masalan, $y = x^4, y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{4}\right)^5 + 6, y = x^2$ funksiyalar darajasida butun son qatnashgan darajali funksiyaga, $y = \sqrt[4]{2x - 4}, y = -\sqrt{x} + 4, y = \left(\frac{1}{3}x + 6\right)^{\frac{2}{3}}, y = \sqrt[3]{x}$ funksiyalar esa darajasida kasr son qatnashgan darajali funksiyaga misol bo'ladi.

Ta'rif: $y = x^\alpha, \alpha \neq 0$ funksiyaga **eng sodda darajali funksiya** deyiladi.

1-misol. Grafigi $\mathcal{A}(8; 4)$ nuqtadan o'tadigan eng sodda darajali funksiyani toping.

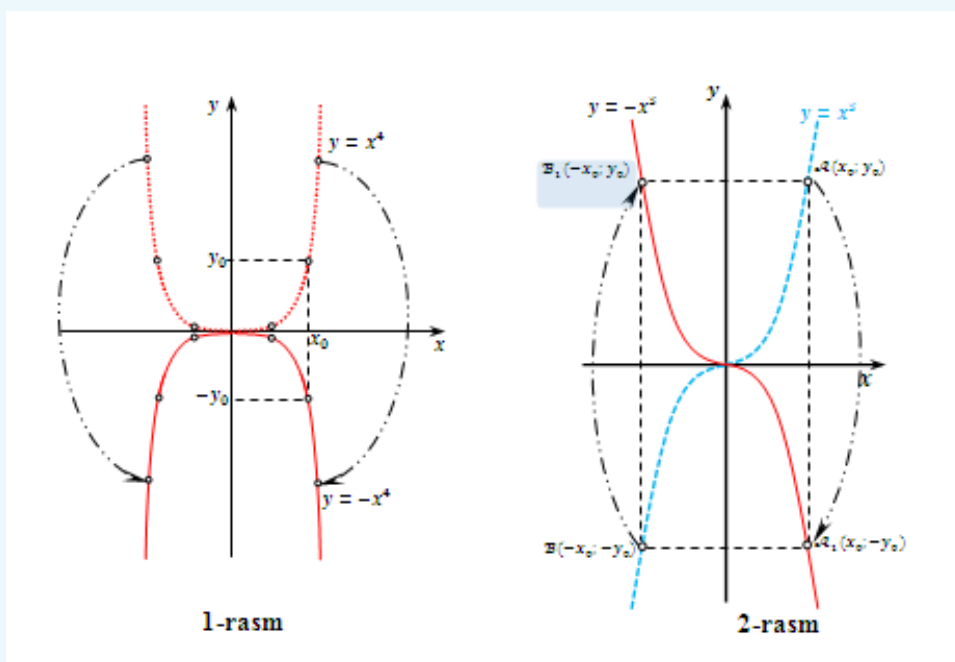
Yechish: $y = x^\alpha$ funksiyaning grafigi \mathcal{A} nuqtadan o'tsa, u holda izlanayotgan funksiya uchun $8^\alpha = 4$ tenglik o'rinli. Bundan $\alpha = \frac{2}{3}$ bo'ladi. Demak, \mathcal{A} nuqtadan o'tuvchi eng sodda darajali funksiya $y = x^{\frac{2}{3}}$ ekan. Javob: $y = x^{\frac{2}{3}}$

$y = a(bx + c)^{\frac{m}{n}} + d$ funksiya grafigining andazasi koordinata tekisligida $y = x^{\frac{m}{n}}$ funksiya grafigi ustida elementar shakl almashtirishlar bajarib, ya'ni quyidagi zanjir asosida ketma-ket yasalishini bilish yetarli:

$$\boxed{y = x^{\frac{m}{n}}} \rightarrow \boxed{y = (bx)^{\frac{m}{n}}} \rightarrow \boxed{y = a(bx)^{\frac{m}{n}}} \rightarrow \boxed{y = a(bx + c)^{\frac{m}{n}}} \\ \rightarrow \boxed{y = a(bx + c)^{\frac{m}{n}} + d}$$

2-misol. $y = -x^3$ va $y = -x^4$ funksiyalarning grafigini yasang.

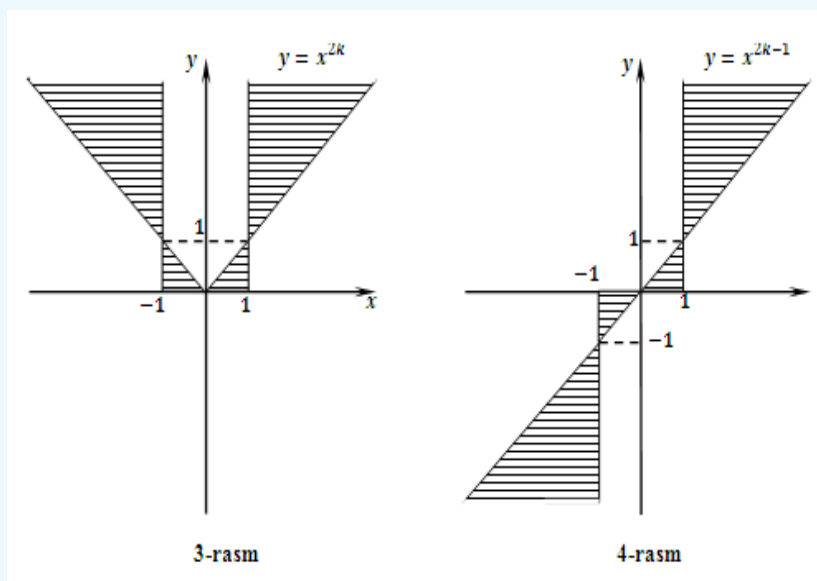
Yechish: $y = -x^3$, $y = -x^4$ funksiyalarning qiymatlari mos ravishda $y = x^3$ va $y = x^4$ funksiyalarning qiymatlaridan faqat ishorasi bilan farq qilgani uchun $y = -x^3$, $y = -x^4$ funksiyalarning grafigi $y = x^3$ va $y = x^4$ parabolalarni Ox o'qiga nisbatan simmetrik sindirish orqali hosil qilinadi(1-2-rasm).

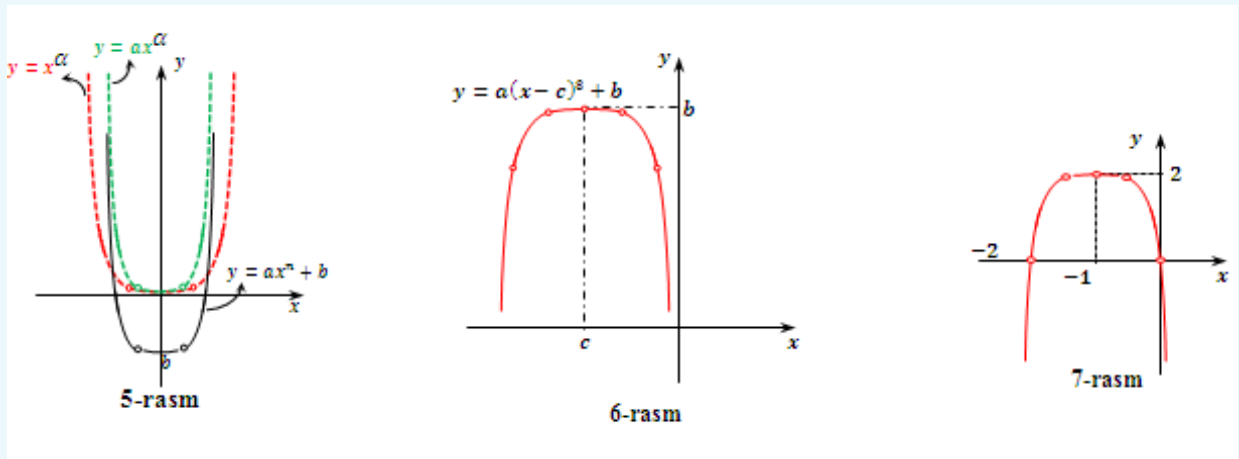


Quyida keltirilgan juda qiziq bir da'voni mustaqil o'ylab, tekshirib ko'ring:

$y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$ darajali funksiyaning grafigi

- α ning juft qiymatlarida 3 - rasmdagi shtrixlangan sohada;
- α ning toq qiymatlarida 4 - rasmdagi shtirxlangan sohada joylashadi.





3-misol(mustaqil). Bitta koordinatalar tekisligida $y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = x^5$ funksiyalarning grafigini yasang va ularni 3-va 4-rasmlar bilan taqqoslang.

4-misol. $y = ax^\alpha + b$ funksiyada α –juft natural son, $a > 0$ va $b < 0$ bo’lsa, uning andazasini yasang.

Yechish:

- α –juft natural son bo’lgani uchun $y = x^\alpha$ funksiyaning grafigi 3-rasmdagi shtirxlangan sohadagi α –darajali parabola bo’ladi;
- $a > 0$ son bo’lgani uchun $y = ax^\alpha$ funksiyaning grafigi $y = x^\alpha$ funksiya grafigini absissalar o’qidan ordinatalar o’qi bo’ylab a barobar cho’zish orqali hosil qilangani uchun $y = ax^\alpha$ funksiya grafigining andzasi $y = x^\alpha$ funksiya grafigining andzasiga o’xshash bo’ladi;
- $b < 0$ bo’lgani uchun $y = ax^\alpha$ funksiya grafigini Oy o’qi bo’ylab $|b|$ birlik pastga surish orqali $y = ax^\alpha + b$ funksiya grafigining andzasi hosil qilinadi.

A. Umuman olganda, $\alpha = 2k$ –juft natural son bo’lganda $y = a(x - c)^\alpha + b$ funksiya grafigining andzasi xuddi $y = a(x - c)^2 + b$ parabolaning andzasi qanday bo’lsa, xuddi shunday bo’ladi, ya’ni parabola tarmoqlari yo’nalishi a parametrning ishorasiga bog’liq, parabola uchi $(c; b)$ koordinatali nuqtada bo’ladi.

5-misol. $y = a(x - c)^\alpha + b$ funksiyada $a < 0, c < 0, b > 0$ bo’lsa, uning **grafigining andzasini yasang.**

Yechish: Berilgan funksiya grafigi juft darajali paraboladan iborat bo’lgani uchun:

- Parabola tarmoqlari pastga yo’nalgan: $a < 0$;
- Parabola uchi $(c; b)$ -II chorakda joylashgan: $c < 0, b > 0$. (6-rasm).

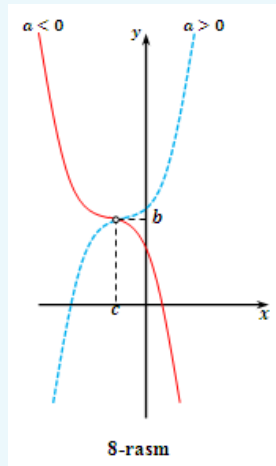
6-misol. $y = -2(x + 1)^4 + 2$ funksiya grafigini yasang.

Yechish: Yuqorida aytilganiga ko’ra juft ko’rsatkichli darajali funksiyaning grafigi, xuddi kvadrat funksiyaning grafigi kabi yasaladi. Shuning uchun quyidagilar o’rinli:

- 4-darajali parabola tarmoqlari pastga yo’nalgan bo’ladi. Chunki, $a = -2 < 0$;
- 4-darajali parabola uchi $\mathcal{A}(-1; 2)$ nuqtada bo’ladi. Chunki, $c = -1, b = 2$;
- Funksiyaning nollari: $-2(x + 1)^4 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$;
- Funksiya grafigi Oy o’qini $x = 0 \Rightarrow y = 0, \mathcal{B}(0; 0)$ nuqtada kesib o’tadi.

5. Yuqoridagi 4 ta banddan foydalanib $y = -2(x + 1)^4 + 2$ funksiya grafigini yasaymiz (7 -rasm).

B. $\alpha = 2k - 1$ –toq natural son bo’lganda $y = a(x - c)^\alpha + b$ funksiya grafigining andazasi xuddi $y = a(x - c)^3 + b$ kubik parabolaning andazasi qanday bo’lsa, xuddi shunday bo’ladi, ya’ni parabola tarmoqlari yo’nalishi a parametrning ishorasiga bog’liq, parabola uchi $(c; b)$ koordinatali nuqtada bo’ladi(8-rasm).



7-misol(mustaqil). $a > 0, b < 0, c > 0$ va n –toq natural son bo’lsa, $y = a(x - c)^\alpha + b$ funksiya grafigining andazasini yasang.

8-misol* (mustaqil). $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ va α –juft natural son bo’lsa, $y = a(bx + c)^\alpha + d$ funksiya grafigining andazasini yasang.

Ko’rsatma: Berilgan funktsiyani $y = a(bx + c)^\alpha + d = ab^\alpha \left(x + \frac{c}{b}\right)^\alpha + d$

ko’rinishga keltirib olib, **A** qoidadan foydalaning.

Ta’rif: $y = x^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$ funktsiyaning grafigiga n –**darajali giperbola** deyiladi. Xususan, $\alpha = 3$ da **kubik giperbola** deyiladi.

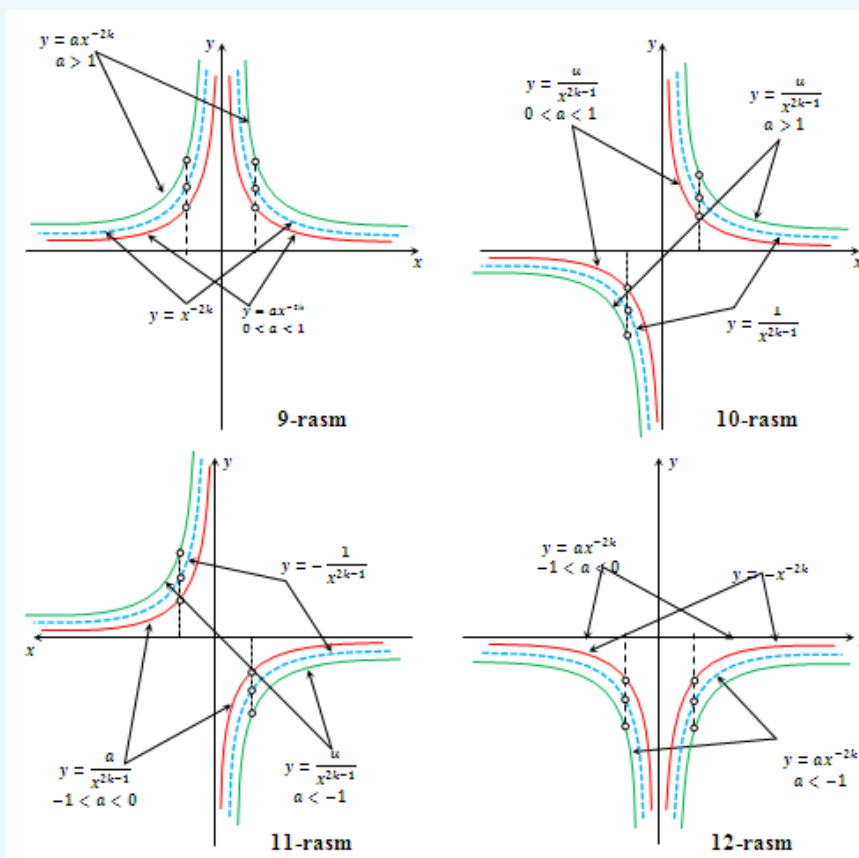
9-misol. $y = ax^{-\alpha}$ funksiya grafigini quyidagi shartlar asosida andazasini yasang:

1. $a > 0$ va α –juft natural son bo’lsa;
2. $a < 0$ va α –juft natural son bo’lsa;
3. $a > 0$ va α –toq natural son bo’lsa;
4. $a < 0$ va α –toq natural son bo’lsa;

Yechish:

- 1) α –juft natural son bo’lsa, $y = x^{-\alpha}$ funksiya grafigining andazasi 13-rasmdagi kabi bo’ladi. Argumentning tayin qiymatida $y = ax^{-\alpha}, a > 0$ funktsiyaning qiymati $y = x^{-\alpha}$ funksiya qiymatini a ga ko’paytirish bilan hosil qilingani uchun aytish mumkinki, $y = ax^{-\alpha}$ funksiya grafigining andazasi $y = x^{-\alpha}$ funksiya grafigini absissalar o’qidan ordinatalar o’qi bo’ylab: agar $a > 1$ bo’lsa, a marta cho’zish bilan; agar $0 < a < 1$ bo’lsa, $\frac{1}{a}$ marta qisish bilan hosil qilinadi(9-rasm).
- 2) $a < 0$ bo’lsa, 1-bandda yasalgan grafikni absissalar o’qiga nisbatan simmetrik sindirish orqali $y = ax^{-\alpha}$ funksiya grafiki hosil qilinadi(12-rasm).

- 3) α –toq natural son bo'lsa, $y = x^{-\alpha}$ funksiya grafigining andazasi 14-rasmdagi kabi bo'ladi. $y = ax^{-\alpha}, a > 0$ funksiya grafigi 1-banddagi kabi yasaladi(10-rasm).
- 4) $a < 0$ bo'lsa, 3-bandda yasalgan grafikni absissalar o'qiga nisbatan simmetrik sindirish orqali $y = ax^{-\alpha}$ funksiya grafigi hosil qilinadi(11-rasm).



9-misolda tasvirlangan grafiklarga ko'ra quyidagi xulosalarni olish mumkin:

$y = ax^{-\alpha}$ funksiya

1) $a > 0$ bo'lganda $y = x^{-\alpha}$ funksiyaning barcha xossalariga ega, chunonchi:

- α –juft natural son bo'lganda grafik I va II choraklarda joylashgan hamda $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda monoton o'suvchi, $x \in (0; +\infty)$ oraliqda monoton kamayuvchi bo'ladi;
- α –toq natural son bo'lganda grafik toq choraklarda joylashgan bo'ladi va $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ oraliqda monoton kamayuvchi bo'ladi;

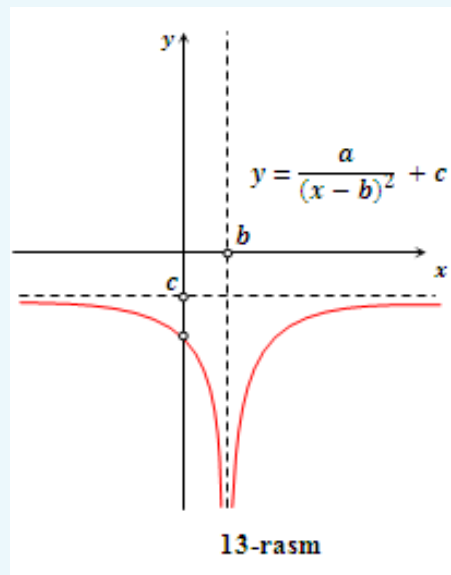
2) $a < 0$ bo'ib

- α –juft natural son bo'lganda grafik III va IV choraklarda joylashgan bo'ladi hamda $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda monoton kamayuvchi, $x \in (0; +\infty)$ oraliqda monoton o'suvchi bo'ladi;

α –toq natural son bo'lganda grafik juft choraklarda joylashgan bo'ladi va $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ oraliqda monoton o'suvchi bo'ladi;

Umuman olganda, istalgan $y = a(x - b)^{-\alpha} + c, \alpha \in \mathbb{N}$ formula bilan aniqlangan α –darajali giperbolaning andazasi quyidagicha yasaladi:

- 1) Vertikal $x = b$ va gorizontal $y = c$ to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Bunda $x = b$ va $y = c$ to'g'ri chiziq'larga yordamchi koordinata o'qlari deyiladi;
- 2) Andazasi $y = ax^{-\alpha}$ funksiyaning andazasi kabi bo'lgan faqat vertikal asimptotasi $x = b$, gorizontal asimptotasi $y = m$ bo'lgan α –darajali giperbola yasaladi



10-misol. $a < 0, b > 0$ va $c < 0$ bo'lsa, $y = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ funksiya grafigining andazasini yasang.

Yechish:

- 1) Keltirilgan darajali funksiyaning ko'rstakichi $\alpha = 2$ bo'lgani uchun $y = \frac{a}{x^2}, a < 0$ funksiya grafigining andazasi 12-rasmdagi kabi bo'ladi;
- 2) $b > 0$ bo'lgani uchun vertikal asimptota, ya'ni $x = b$ to'g'ri chiziq Ox o'qining musbat yarim o'qini kesib o'tadi;
- 3) $c < 0$ bo'lgani uchun gorizontal asimptota, ya'ni $y = c$ chiziq Oy o'qining manfiy yarim o'qini kesib o'tadi;
- 4) Demak, yuqoridagi uchta bandga asosan, 2-darajali giperbolaning andazasi 13-rasmdagi kabi bo'ladi.

11-misol*(mustaqil). $a > 0, b < 0, c > 0$ va $d < 0$ bo'lsa, $y = a(bx + c)^{-2} + d$ va $y = a(bx + c)^{-3} + d$ funksiyalar grafigining andazasini yasang.

Ko'rstama: berilgan funksiyalarni

$$y = a(bx + c)^{-2} + d = ab^{-2} \left(x + \frac{c}{b}\right)^{-2} + d \text{ va } y = ab^{-3} \left(x + \frac{c}{b}\right)^{-3} + d$$

ko'rinishda yozib oling va grafigini yasang. Bunda giperbolalarning asimptotalari

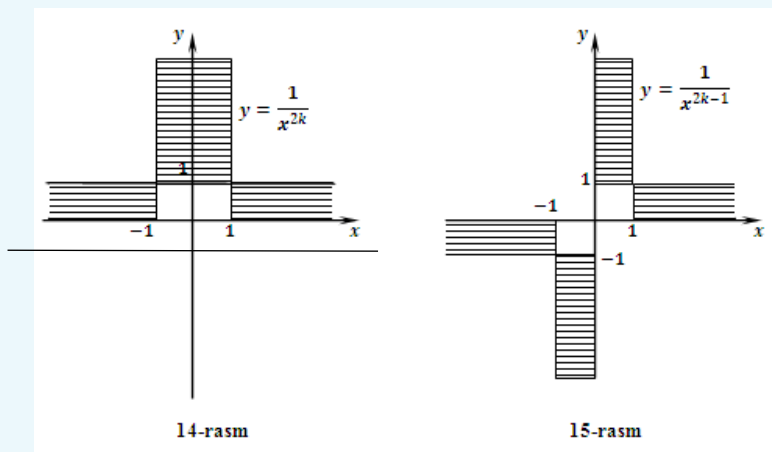
$x = -\frac{c}{b}, y = d$ chiziqlar bo'ladi.

Quyida keltiriladigan da'voni mustaqil o'ylab ko'ring:

$y = x^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$ darajali funksiyaning grafigi

- α ning juft qiymatlarida 14-rasmdagi shtrixlangan sohada;

α ning toq qiymatlarida 15-rasmdagi shtirxlangan sohada joylashadi.

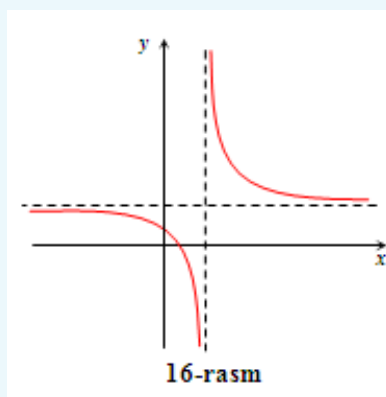


12-misol. 16-rasmda $y = a(bx + c)^{-3} + d$ giperbolaning andazasi tasvirlangan. Unga ko'ra a, b, c va d larning ishorasini aniqlang.

Yechish: Berilgan funktsiyani ushbu $y = \frac{ab^{-3}}{(x+\frac{c}{b})^3} + d$

ko'rinishda yozib olamiz. U holda grafikka ko'ra:

- 1) Funktsiya kamayuvchi bo'lgani uchun $ab^{-3} > 0$;
- 2) Vertikal asymptotasi: $x = -\frac{c}{b}$ chiziq Ox o'qining musbat yarim o'qini kesib o'tgani uchun $-\frac{c}{b} > 0 \Rightarrow \frac{c}{b} < 0$;
- 3) Gorizontal asymptotasi: $y = d$ chiziq Oy o'qining musbat yarim o'qini kesib o'tgani uchun $d > 0$.



bu munosabatlardan a, b, c larning ishorasini aniqlaymiz: $a > 0, b > 0, c < 0$ yoki $a < 0, b < 0, c > 0$. Demak, $y = a(bx + c)^{-3} + d$ funktsiyada $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ yoki $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ bo'lsa, uning grafigi 16 - rasmdagi kabi bo'ladi.

Javob: $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ yoki $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0, c < 0, d > 0$

Kiyingi yillarda akademik litsey kasb-hunar kollejlari hamda umumta'lim maktablari o'qituvchilari va o'quvchilari o'rtasida darajali funktsiyaga bo'lgan qiziqish ortdi. Oliy ta'lim muassasalariga kirish test sinovlarida yoki o'qishga kirish uchun tayyorgarlik ko'radigan o'quvchilar uchun o'quv va uslubiy qo'llanmalarda ham ko'p uchraydi.

**Adabiyotlar ro'yxati**

1. Сахаев М. Мактабда функция ва графикларни ўрганиш, ўқитувчилар учун қўлланма, “Ўқитувчи” нашриёти, Тошкент - 1970. – 153- 175 бетлар.
2. Болтянский В.Г., Сидров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. Изд. “Наука”, Москва- 1971.-592 с.
3. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1984. -288 с.
4. Гусак Г.М., Капуцкая Д.А. Математика для подготовительных отделений вузов. Справ. Пособие. –Мн.: Выш.шк. 1989.—495 с.
5. Умрбеков А.У., Шаабзалов Ш.Ш. Математикани такрорланг “Ўқитувчи” нашриёти, Тошкент, 1989,- 440 б.
6. Райхмистр Р.Б. Графики функции. М.: ВШ. 1991. – 160 с.
7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. -3-ое изд.,-М.: Высш.школа,1995. –416 с.
8. Alimov Sh.O., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra, umumiy ta’lim maktablari uchun darslik, “O’qituvchi” nashriyoti, Toshkent- 2006.- 56-72, betlar.
9. Гельфанд И.М., Глаголова Е.Е., Шноль Э.Э. Функции и графики (основные приёмы). – М.: МЦНМО, 2006. – 120 с.
10. Usmanov M Matematika. Oliy o’quv yurtiga kiruvchilar uchun, Ma’lumotnoma 1-qism. “Na vro’z” nashriyoti, Toshkent.—2017. 379 b.