HAYOT DAVOMIDA TA'LIM OLISH: YANGI PARADIGMALAR VA KUTILADIGAN NATIJALAR

FAN, TA'LIM VA AMALIYOT INTEGRATSIYASI

ISSN: 2181-1776

Z.Q. Shukurov[1], E.Ergashova[2], M.Ashirova[2]

[1]Samarqand davlat universiteti Kattaqo'rg'on filiali "Axborot tenologiyalari" kafedrasi mudiri (PhD),
[2]Samarqand davlat universiteti Kattaqo'rg'on filiali talabalari

KOMPLEKS SONLARNI TRIGONOMETRIK KO'RINISHINING SODDA IFODASI VA EYLER FORMULASINING SODDA ISBOTI

Annotatsiya

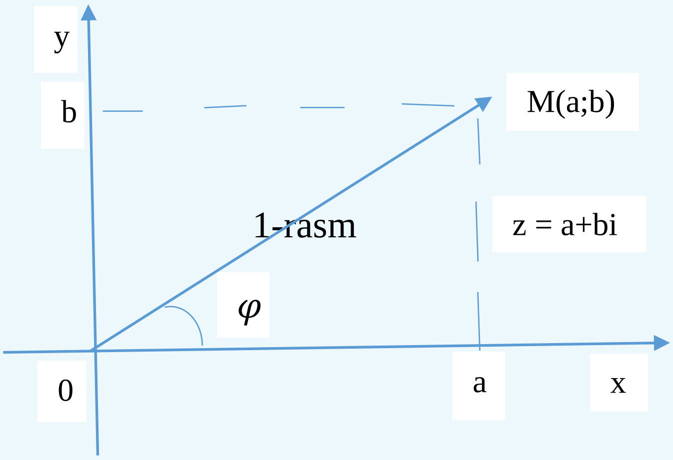
Ushbu maqolada kompleks sonning algebraik, trigonometrik ko'rinishlarini maktab o'quvchisiga sodda ravishda tushuntirish ko'rib chiqilgan. Bundan tashqari kompleks sonning kompleks funksiyasini kiritib, Eyler formulasini sodda shaklda isboti keltirilgan. Chunki bu formula o'rta maktab dasturida keltirilgan va o'rta maktab uchun joriy etilgan darslik adabiyotlarda mohiyati aks ettirilmagan. Biz bu maqolada shu jihatlarga e'tibor qaratdik.

Kalit so'zlar

Kompleks son, triganometrik shakldagi kompleks son, kompleks o'zgaruvchili funksiya, kompleks ko'rsatkichli funksiya, Eyler formulasi.

Asosiy qism: Biz ushbu $a+bi$ ko'rinishdagi ifodani kompleks son deb ataymiz. Bu yerda a va b - haqiqiy sonlar, i soni esa $i^2=-1$ tenglik bilan aniqlanib, mavhum birlik deyiladi.

Biz $z=a+bi$ kompleks sonni tekislikning $(a;b)$ koordinatali nuqtasi bilan tasvirlash orqali ko'rsatamiz. (1-rasm)



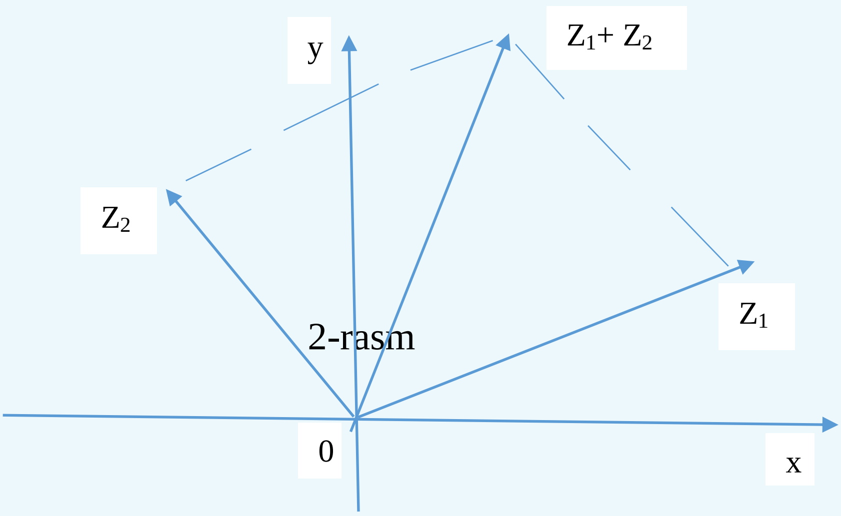
1-rasm

Endi kompleks sonning geometrik talqining xossalarini keltiramiz.

Chunki bu xossalar yordamida o‘quvchida kompleks sonning tushunilishi yanada oson o‘rganiladi.

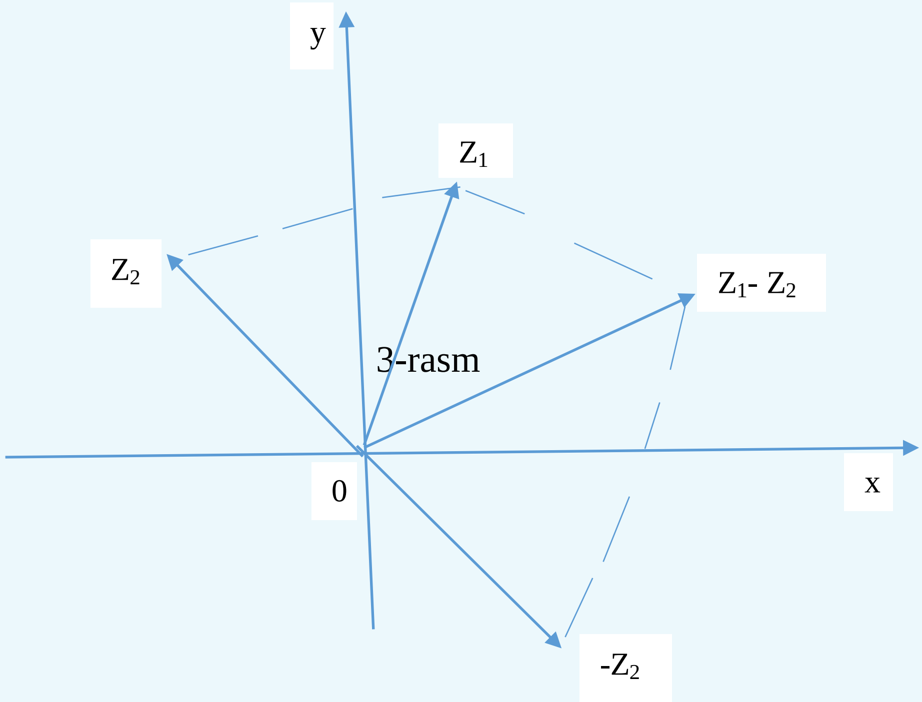
1. $\vec{z}$ vektorning uzunligi $|z|$ ga teng.
2. $z = a - bi$ va $z = a - bi$ nuqtalar haqiqiy o‘qqa nisbatan simmetrikdir.
3. z va $-z$ nuqtalar $z = 0$ nuqtaga nisbatan simmetrikdir.

4. $z_1 + z_2$ son geometrik jihatdan z_1 va z_2 nuqtalarga mos vektorlarni qo‘shish qoidasiga asosan yasalgan vektor kabi tasvirlanadi. (2-rasm)



2-rasm

5. z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi masofa $|z_1 - z_2|$ ga teng. (3-rasm)



3-rasm

Haqiqiy o‘q Ox va $\overrightarrow{OM}$ vektor orasidagi burchak (haqiqiy o‘qning musbat yo‘nalishidan boshlab hisoblanuvchi) φ burchak $z \neq 0$ kompleks sonning argumenti deyiladi. (1-rasm) va quyidagicha ifodalanadi:

$$\varphi = \arg z \quad yoki \quad \varphi = \arg(a+bi) \qquad (1)$$

Trigonometrik funksiyalarning ta’rifidan, agar $\varphi = \arg(a+bi)$ bo‘lsa, u holda:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r} \qquad (2)$$

Bu yerda:

$$r = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Endi biz bu formulalardan foydalanib kompleks sonning trigonometrik ko‘rinishini hosil qilamiz:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

Kompleks sonning $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ (bu yerda $r \succ 0$) kabi tasvirlanishiga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

Bizga $z = x + iy$ ko‘rinishidagi kompleks o‘zgaruvchili funksiya berilgan bo‘lsin. Bu kompleks o‘zgaruvchili funksiyani ikkinchi tur ajoyib limitga asosan ya’ni quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{z}}\right)^{\frac{n}{z}}\right)=e^z$$

Bu tenglikdan

$$e^z=e^x\cdot(\cos y+i\cdot\sin y)\ a=0$$

$$e^{x+iy}=e^x\cdot(\cos y+i\cdot\sin y) \qquad (3)$$

formulalarni hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan (3) formula Eyler formulasi deyiladi.

Isbot. (3) formulada $a=0$ bo‘lsa :

$$\cos y+i\cdot\sin y=e^{yi} \qquad (4)$$

Hosil bo‘ladi va $y=-y$ deb olinsa quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\cos y-i\cdot\sin y=e^{-yi} \qquad (5)$$

(4) va (5) tengliklarni qo‘shish va ayirish orqali

$$\cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2} \qquad (6)$$

$$\sin y=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i} \qquad (7)$$

ekanligi kelib chiqadi.

$z=x+yi$ kompleks o‘zgaruvchili funksiyada $x=a$ va $y=b$ deb oladigan bo‘lsak, $z=a+bi$ ko‘rinishidagi kompleks songa ega bo‘lamiz.Bu orqali $\varphi=y$ deb olib (2) tenglikni (6) va (7) tengliklarga tenglashtirsak quyidagi ko‘rinish hosil bo‘ladi.

$$\cos\varphi=\cos y,\quad \sin\varphi=\sin y$$

$$\frac{a}{r}=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2}\ ,\qquad \frac{b}{r}=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}$$

$$a=\frac{r\cdot\left(e^{yi}+e^{-yi}\right)}{2} \qquad (8)$$

$$b=\frac{r\cdot\left(e^{yi}-e^{-yi}\right)}{2i} \qquad (9)$$

(8) va (9) tengliklarni $z=a+bi$ ko‘rinishdagi o‘rinlariga mos ravishda qo‘ysak:

$$z=a+bi=r\cdot\left(\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2}\right)+r\cdot\left(\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}\right)i=r\cdot e^{yi}$$

hosil bo‘ladi. Bu esa $z = r \cdot e^{yi}$ va $z = r \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$ ekanligidan quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$r \cdot e^{yi} = r \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \quad e^{yi} = (\cos y + i \cdot \sin y) \qquad (10)$$

Hosil bo‘lgan (10) tenglikdan foydalanib (3) formulada $\cos y + i \cdot \sin y$ o‘rniga e^{yi} qo‘yilsa:

$$e^{x} \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^{x} \cdot e^{yi} = e^{x+yi}$$

ekanligini ko‘rishimiz mumkin. Bu orqali esa Eyler formulasi o‘rinli ekanligi ma’lum bo‘ladi.

Xulosa:

Maqolada kompleks sonning ya’ni $a + bi$ ko‘rinishining geometrik talqinini va kompleks son qanday son ekanligini geometrik xossalar orqali maktab o‘quvchisiga sodda ko‘rinishda tushuntirishni ko‘rsatdik. $a + bi$ kompleks sonini Dekart koordinatalar sistemasida sodda grafiklar orqali uning trigonometrik ko‘rinishga o‘tishini ko‘rsatdik.

Bundan tashqari $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$ ajoyib limitdan foydalanib kompleks sonning ko‘rsatkichli funksiyasini hosil qilish va Eyler formulasining kelib chiqishini isbotlashni sodda ravishda keltirdik. Bu $e^{x+yi} = e^{x} \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$ Eyler formulasi kompleks o‘zgaruvchili funksiyalarni hisoblashda, murakkab funksiyalarni isbotlashda muhim rol o‘ynaydi. Shuning uchun bu formulaning mohiyatini o‘quvchi tushunishi muhim hisoblanadi.

Adabiyotlar:

1. M.A.Mirzaahmedov, Sh.N.Ismailov, A.Q.Amanov "Algebra va analiz asoslari" 10-sinf 75-81-betlar.Toshkent 2017.
2. A.N.Kolmogorov tahriri ostida Algebra va analiz asoslari. 10-11-sinflar uchun darslik. Toshkent, "O‘qituvchi" 1992-yil.
3. A.U.Abduhamidov va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, "O‘qituvchi" 2001-yil.
4. R.H.Vafoyev va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, "O‘qituvchi" 2001-yil.
5. U.X.Narzullayev, A.S.Soleev. Kompleks sonlar. "Algebra va sonlar nazariyasi fanidan amaliy mashg‘ulotlar o‘tkazish uchun uslubiy tavsiyalar 31-bet. Samarqand 2011-yil.