

MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR**Bo'riyev Tolibjon Ergashovich¹****Beginmov Ulug'bek Botirjonovich²**¹*Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent*²*Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, matematika yo'nalishi talabasi*

Annotatsiya: Mazkur maqolada matritsalarining kelib chiqishi, tushunchasi, matritsalar bo'yicha boshlang'ich tasavvur, talabalarda chiziqli algebra bo'yicha nazariy bilimlar va amaliy ko'nikmalarni shakllantirishi hamda mazmunning sodda, tushunarli va tizimli bayon etilgan bo'lib ular ustida bajariladigan asosiy amallar, matritsaning matematik model sifatidagi ahamiyati ochib berilgan va chiziqli algebra masalalarini yechishda tutgan o'rniga to'xtalib o'tilgan.

Kalit so'zlar: matritsa, chiziqli algebra, determinant, Sarrus qoidasi, minor.

МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В данной статье в простой, понятной и систематизированной форме излагаются происхождение и понятие матриц, начальное понятие матриц, формирование теоретических знаний и практических навыков по линейной алгебре у учащихся, а также содержание объясняются основные операции, выполняемые над матрицами, значение матриц как математической модели и их роль в решении задач линейной алгебры.

Ключевые слова: матрица, линейная алгебра, определитель, правило Саррюса, минор.

MATRICES AND OPERATIONS ON THEM

This article examines the origin and concept of matrices, introduces the basic understanding of matrices, and discusses the formation of theoretical knowledge and practical skills in linear algebra among students. The material is presented in a simple, clear, and systematic manner. In addition, the fundamental operations on matrices are explained, the significance of matrices as mathematical models is highlighted, and their role in solving linear algebra problems is addressed.

Keywords: matrix, linear algebra, determinant, Sarrus' rule, minor.

Kirish. Hozirgi zamon matematikasi va uning amaliy yo'nalishlarida matritsalar nazariyasi alohida o'rin tutadi. Chiziqli algebra fanining asosiy bo'limlaridan biri bo'lgan matritsalar nafaqat nazariy masalalarni yechishda, balki fizika, informatika, iqtisodiyot, muhandislik va texnologiya sohalarida ham keng qo'llaniladi. Matritsalar yordamida murakkab jarayonlarning matematik modellari tuziladi, ularning o'zaro bog'liqligi tahlil qilinadi hamda real amaliy masalalar samarali hal etiladi.

Tadqiqot metodologiyasi va adabiyotlar tahlili. Mazkur tadqiqotni amalga oshirish jarayonida nazariy tahlil, taqqoslash, umumlashtirish hamda matematik

modellashtirish metodlaridan foydalanildi. Tadqiqotning nazariy asosini chiziqli algebra bo'yicha klassik va zamonaviy ilmiy manbalar tashkil etadi.

Matritsalar tushunchasining dastlabki ko'rinishlari qadimgi Xitoy matematik manbalarida uchraydi. Xususan, "To'qqiz bobli matematika san'ati" asarida chiziqli tenglamalar sistemalarini jadval ko'rinishida yechish usullari bayon qilingan. Bu usullar keyinchalik matritsalar nazariyasining shakllanishiga zamin yaratgan [1, 56].

XVII–XVIII asrlarda determinantlar nazariyasining rivojlanishi matritsalar algebrasining shakllanishiga asos bo'ldi. 1751-yilda G. Kramer tomonidan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usuli taklif etildi. Keyinchalik K. Gauss tomonidan tenglamalar sistemasini yechishning universal eliminatsiya usuli ishlab chiqildi [2, 16].

Matritsalar nazariyasining mustaqil matematik yo'nalish sifatida shakllanishida XIX asr olimlari U. Hamilton va A. Cayleylarning ilmiy ishlari muhim ahamiyat kasb etdi. Ayniqsa, A. Cayley tomonidan matritsalar algebrasining asosiy qonunlari ishlab chiqilgan [9, 83].

Zamonaviy tadqiqotlarda matritsalar nazariyasi nafaqat sof matematikada, balki amaliy sohalarida ham keng qo'llanilmoqda. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish, kompyuter grafikasi, sun'iy intellekt, ma'lumotlarni qayta ishlash, fizik jarayonlarni matematik tavsiflash kabi yo'nalishlarda matritsalar muhim matematik apparat sifatida xizmat qilmoqda.

Hozirgi kunda chiziqli algebra va matritsalar nazariyasini o'qitish metodikasiga oid tadqiqotlarda talabalar tomonidan mavzuni chuqur o'zlashtirish uchun vizual modellar, grafik organayzerlar, raqamli texnologiyalar va interaktiv o'qitish usullaridan foydalanish samarali natija berishi ta'kidlanmoqda [4, 68].

Mazkur tadqiqotda matritsalar nazariyasining nazariy asoslari tahlil qilinib, determinant, minor, matritsa rangi kabi tushunchalarning mazmuni tizimli ravishda yoritildi hamda ularning chiziqli algebra masalalarini yechishdagi ahamiyati asoslab berildi.

Ta'riflar. Matritsaning ta'rif rasman murakkabroq tarzda (ko'pincha ikkita o'zgaruvchining funksiyasi sifatida) berilgan bo'lsa-da, umumiy foydalanish uchun matritsani raqamlar yoki belgilardan tashkil topgan to'rtburchaklar jadval (panjara bo'lmagan jadval) deb tasavvur qilish kifoya. Matritsa chiziqli algebra fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat to'rtburchak shaklda joylashgan sonlar, matematik ifodalar yoki belgilar jadvali sifatida aniqlanadi.

Matritsaning o'lchami uning satrlar va ustunlar soni bilan aniqlanadi. Masalan, $m \times n$ o'lchamli matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat bo'ladi.

Agar matritsaning satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, ya'ni $m = n$ bo'lsa, bunday matritsa kvadrat matritsa deb ataladi. Kvadrat matritsalarda asosiy diagonal va yordamchi diagonal tushunchalari muhim ahamiyatga ega.

Matritsalar quyidagi turlarga ajratiladi:

- Nol matritsa – barcha elementlari nolga teng bo'lgan matritsa.

- Birlik matritsa – asosiy diagonal elementlari 1 ga, qolgan elementlari 0 ga teng bo‘lgan kvadrat matritsa.
- Diagonal matritsa – asosiy diagonalidan tashqaridagi elementlari nol bo‘lgan matritsa.
- Uchburchak matritsa – asosiy diagonalidan yuqori yoki pastki qismidagi elementlari nol bo‘lgan matritsa.

Matritsalar ustida quyidagi asosiy amallar bajariladi: qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish va matritsalarini ko‘paytirish. Matritsalarini qo‘shish va ayirish faqat o‘lchamlari bir xil bo‘lgan matritsalar uchun aniqlangan.

Matritsalarini ko‘paytirish amalida birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng bo‘lishi kerak.

Matritsa determinant tushunchasi kvadrat matritsalar uchun aniqlanadi va u matritsaning muhim algebraik xossalarini aniqlash imkonini beradi.

Matritsa rangi matritsada chiziqli mustaqil satrlar yoki ustunlar soniga teng bo‘ladi.

Matritsalar matematik modellashtirishda muhim vosita hisoblanib, ular yordamida murakkab jarayonlarni ixcham matematik ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Aslida, bu elementar chiziqli algebra darsliklarida matritsalarini belgilashning juda keng tarqalgan usuli hisoblanadi.

Masalan:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 6 & b \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} m+7 & 3.4 \\ |4x| & n \end{bmatrix}$$

Har bir matritsaning elementlari qatorlarga - gorizontalar

2	4	6	8
9	7	5	3
1	1	21	31

va ustunlarga – vertikal ravishda guruhlanadi

2	4	6	8
9	7	5	3
11	21	31	41

Shu sababli matritsada joylashga har bir elementga satr raqami va qator raqamidan foydalanib nom berishimiz mumkin va bu bizga element qayerda joylashgani haqida ma’lumot beradi.

a_{11} a_{12} a_{13}
 a_{21} a_{22} a_{23} kabi nomlab (belgilab) chiqish mumkin buni odatda

a_{ij} – belgilash deb ataymiz. (Masalan, a_{21} element 2-qator 1-ustunda joylashgan).

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 45 & 28 \\ 24 & 15 & 41 & 33 \\ 6 & 3 & 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

bu yerda b_{32} element 3 ga teng.

Qatorlar soni va ustunlar soni matritsaning tartibini belgilaydi (o'lchov atamasi ham ishlatiladi). Masalan, A matritsasida 2 ta qator va 3 ta ustun bor, shuning uchun u 2×3 tartibda. B matritsasida 3 ta qator va 4 ta ustun bor (1). Agar matritsalarining o'lchamlari bir xil bo'lsa va bir xil pozitsiyada turgan elementlar teng bo'lsa, ular teng deyimiz.

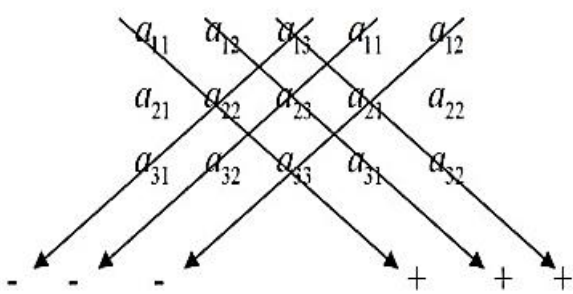
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matematikada matritsa algebrasining bo'linishi dasturlash sohasida iqtisodchilar va sohaning boshqa mutaxassislari uchun muhim deb hisoblanadi va iqtisodiy jarayonlar va obyektlarning matematik modeli oddiy va ixcham matritsalar shaklida ifodalanadi. Agar matritsaning qator va ustun yo'llari soni bir-biriga teng bo'lsa, bunday matritsa kvadrat matritsa deb ataladi. Kvadrat matritsaning yo'llari soni uning tartibini ko'rsatadi.

Determinantni hisoblash. Determinant — bu kvadrat matritsaga mos keluvchi son bo'lib, u matritsaning asosiy xossalarini (teskari matritsa mavjudligi, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga egaligi va geometrik o'zgarishlarni) aniqlashda ishlatiladi. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchakusuli sxematik ravishda quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\Delta = + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Ushbu determinantni hisoblashni Sarrus usuli ham mavjud bo'lib, uchinchi tartibli determinantni hisoblash uchun Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar Determinant ustunlarining o'ng tomoniga yoziladi. Hosil bo'lgan kengaytirilgan jadvalda boshning diagonal yo'nalishi bo'yicha joylashgan elementlar diagonal yo'nalishi bo'yicha elementlarni musbat ishora bilan ko'paytirish orqali hosil qilinadi va ikkilamchi diagonal yo'nalishi bo'yicha elementlar yig'indini manfiy ishora bilan ko'paytirish va olish orqali hosil qilinadi. Bu yig'indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema bo'yicha quyidagicha ta'riflash mumkin:



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Ixtiyoriy o'lchamdagi matritsadan bir nechta qator yoki ustunlarni o'chirish orqali hosil qilingan kvadrat matritsaning determinanti matritsa minori deb ataladi. Hosil bo'lgan ushbu kvadrat matritsaning o'lchami esa minor tartibi deb yuritiladi. Agar berilgan matritsa kvadrat shaklda bo'lsa, uning eng katta tartibli minori matritsaning o'z determinantiga teng bo'ladi, chunki eng katta kvadrat sub-matritsa - bu matritsaning o'zi. Matritsaning biror qatori boshqa qatorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi mumkin bo'lsa, bunday almashtirishlardan so'ng ushbu qatorning barcha elementlari nolga aylanadi (ya'ni, bunday qator nol qatorda aylantiriladi). Agar hech bo'lmaganda bitta noldan farqli elementi bor qatorni nol bo'lmagan qator deb ataydigan bo'lsak, unda yuqoridagi almashtirishlardan keyin matritsaning rangi aynan shu nol bo'lmagan qatorlar soniga teng bo'ladi, chunki aynan shu qatorlar chiziqli mustaqil qatorlarni anglatadi.

Xulosa. Matritsalar chiziqli algebra fanining poydevor tushunchalaridan biri bo'lib, turli sohalarida qo'llanilishi uning nazariy va amaliy ahamiyatini yanada oshiradi. Matritsalar ustida determinantni hisoblash, minor va algebraik to'ldiruvchilarni aniqlash kabi operatsiyalarni o'zlashtirish talabalarga murakkab algebraik masalalarni yechishda mustahkam tayanch bo'lib xizmat qiladi. O'tkazilgan tahlillar matritsalar nazariyasining nafaqat matematik modellash, balki fizika, informatika, iqtisodiyot, muhandislik va boshqa ko'plab yo'nalishlarda qo'llanilishini ko'rsatadi. Ushbu mavzu bo'yicha egallangan bilim va ko'nikmalar talabalarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantiradi, amaliy masalalarni hal qilishda samarali yondashuvlarni shakllantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abdurahmonov Q. Oliy matematika asoslari. – Toshkent, 2019.
2. Xudoyberganov G'. Chiziqli algebra va analitik geometriya. – Toshkent, 2020.
3. Azamatova K.M. "Matritsalar va ular ustida amallar" mavzusini grafik organayzerlar usuli yordamida o'qitishni tashkil etish //Nauchnyy Focus. – 2024. – T. 2. – №.20. – S. 507-512.
4. Xudayarov B.A. Matematika. I qism. Chiziqli algebra va analitik geometriya. Toshkent, "Fan va texnologiya", 2018.
5. Katarzyna Adrianowicz. Department of Mathematical and Artificial Intelligence Methods, Silesian University of Technology, Kaszubska 23, 44-100 Gliwice, Poland.
6. K.Adrianowicz, I.Nowak, Po co nam ta matematyka? Cz.1. Zastosowania algebry liniowej nie tylko dla studentów pierwszych lat studiów technicznych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2016.
7. H. Anton, Ch, Rorres, Elementary Linear Algebra: Applications Version, 11th edition, Wiley, 2014.

8. Hiebert J. Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics. – Lawrence Erlbaum, 2007.
9. Tall D. Advanced Mathematical Thinking. – Springer, 2002.
10. Sfard A. Thinking as Communicating. – Cambridge University Press, 2008.